Théorème de Weierstrass

Théorème 1 (Weierstrass)**.** *L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

Démonstration.

Fixons $\varepsilon > 0$, $f \in E$ et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

Étape 1 : Montrons que la suite $(f * \chi_n)$ converge uniformément vers f.
Comme f est à support compact, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \delta$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par ailleurs, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\int_{|t|>\delta} \chi_n(t)\,dt < \varepsilon$. Alors, pour $n \geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned}
|(\chi_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) f(x-t)\,dt - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)(f(x-t) - f(x))\,dt \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \\
&\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \;+ \int_{|t|>\delta} \chi_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \\
&\leqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t)\,dt \;+ 2\,\|f\|_\infty \int_{|t|>\delta} \chi_n(t)\,dt \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt \;+ 2\varepsilon\,\|f\|_\infty \\
&\leqslant (1 + 2\,\|f\|_\infty)\varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|(\chi_n * f) - f\|_\infty < (1 + 2\,\|f\|_\infty)\varepsilon$, d'où la convergence uniforme.

Étape 2 : On suppose f à support dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$, et P_n la fonction définie par :

$$P_n : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

On a que P_n est une approximation de l'unité. Montrons que $P_n * f$ est un polynôme sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On a :

$$(P_n * f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_n(x-t) f(t)\,dt$$

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a ainsi $|x - t| \leqslant 1$, et :

$$P_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t) x^k$$

avec q_k un polynôme. Ainsi :

$$(P_n * f)(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t) f(t)\, dt$$

Donc $P_n * f$ est bien un polynôme sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Étape 3 : Cas général.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On considère $c < d$ dans $\mathbb{R}$ tels que $[a,b] \subset]c,d[$. On prolonge f par :
- Une fonction affine sur $[c,a]$, valant 0 en c et $f(a)$ en a.
- Une fonction affine sur $[b,d]$, valant $f(b)$ en b et 0 en d.

On obtient ainsi une fonction continue à support dans $[c,d]$. On considère la fonction :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & [c,d] \\ x & \longmapsto & (d-c)x + \frac{c+d}{2} \end{array} \right.$$

On obtient que $f \circ \varphi^{-1}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes ψ_n par les étapes précédentes, donc f est limite uniforme de la suite de polynômes $\psi_n \circ \varphi$.

$\square$

Conclusion. Toute fonction réelle continue sur un compact peut être approchée uniformément par une suite polynômes. $\triangleleft$

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse*. Ellipses